

**Andrzej BIELSKI**

Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Środowiska  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków  
e-mail: abielski@riad.usk.pk.edu.pl

## Transport zanieczyszczeń w rzece z uwzględnieniem dyfuzji dwukierunkowej

W pracy zaprezentowano metodę analitycznego rozwiązywania równania różniczkowego opisującego adwekcyjny transport masy z dwukierunkową dyfuzją w płaszczyźnie normalnej do przepływu w stanach nieustalonych. W metodzie tej funkcję stężenia zapisano w postaci iloczynu trzech funkcji dotyczących czasu oraz dwóch współrzędnych liniowych. Taki sposób reprezentacji funkcji stężenia umożliwia przedstawienie równania transportu masy w postaci trzech równań różniczkowych, odnoszących się tylko do jednej współrzędnej. Rozwiązanie równania transportu masy odnosi się do przypadku równomiernego, prostokątnego rozkładu stężeń zanieczyszczeń w przekroju rzeki. Rozwiązanie umożliwia określenie rozkładu stężeń zanieczyszczeń w przekroju rzeki. Podano również rozwiązania dla przypadku wypływu zanieczyszczeń z nieskończonego małego otworu oraz nieskończonej wąskiej pionowej lub poziomej szczeliny. Sformułowano przybliżone zależności, umożliwiające wyznaczenie czasu przemieszczenia maksymalnego stężenia przekroju do naroża przekroju prostokątnego koryta rzeki oraz czasu wystąpienia stężenia maksymalnego, jakie w ogóle pojawi się w narożu przekroju. Opisano własności otrzymanych rozwiązań. Określono względne momenty wystąpienia maksymalnych zmian stężenia w czasie w wybranym miejscu przekroju koryta rzeki. W przypadku koryta rzeki o przekroju prostokątnym maksymalne zmiany stężeń pojawiają się w przybliżeniu w około  $10/47$  czasu wystąpienia maksymalnego stężenia w narożu przekroju lub w chwili wystąpienia stężenia stanowiącego  $10/32$  stężenia maksymalnego, jakie pojawi się w tym narożu. W przypadku ośrodka nieograniczonego maksymalne zmiany stężeń pojawiają się wcześniej, to jest w  $10/34$  czasu wystąpienia maksymalnego stężenia w tym samym miejscu co w ośrodku ograniczonym. W przypadku ośrodka nieograniczonego maksymalne zmiany stężeń pojawiają się w chwili wystąpienia stężenia stanowiącego  $10/33$  stężenia maksymalnego, jakie pojawi się w tym samym miejscu co w ośrodku ograniczonym. Ułamek  $10/33$  wyznaczony dla ośrodka nieograniczonego jest zbliżony do ułamka  $10/32$  wyznaczonego dla ośrodka ograniczonego (rzeka). Oznacza to, że przebieg zmian stężeń w czasie w tym samym punkcie w obu ośrodkach ma ten sam charakter, a krzywe przedstawiające zmiany stężeń są podobne.

**Słowa kluczowe:** zanieczyszczenia, woda, rzeka, adwekcja, dwukierunkowa dyfuzja, stany nieustalone

### Oznaczenia

#### Alfabet łaciński:

- a - odległość od brzegu rzeki do źródła zanieczyszczeń w kierunku  $y$ , m
- b - odległość od dna rzeki do źródła zanieczyszczeń w kierunku  $z$ , m
- C - stałe
- c - stężenie zanieczyszczeń,  $g/m^3$
- $c_0$  - stężenie zanieczyszczeń w przekroju początkowym,  $g/m^3$

$c_{\text{śrd}}$	- średnie stężenie zanieczyszczeń, $\text{g}/\text{m}^3$
$c_{\text{zrd}}$	- stężenie zanieczyszczeń w strumieniu wypływającym ze źródła zanieczyszczeń, $\text{g}/\text{m}^3$
$D_x, D_y, D_z$	- współczynniki dyfuzji w kierunkach: x, y, z, $\text{m}^2/\text{s}$
$2 \cdot H$	- głębokość kanału, średnia głębokość rzeki, m
$k$	- stała szybkości procesu, $\text{s}^{-1}$
$m$	- indeks
$M$	- maksymalna wartość dla m
$M_s$	- masa substancji, g
$n$	- indeks
$N$	- maksymalna wartość dla n
$Q_{\text{zrd}}$	- wypływ ze źródła zanieczyszczeń, $\text{m}^3/\text{s}$
$r(c)$	- szybkość procesu chemicznego lub biochemicznego, $\text{g}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$
$2 \cdot S$	- szerokości rzeki, m
$t, t_1$	- czas, s
$t_m$	- czas mieszania, s
$t_m^V$	- czas mieszania w kierunku pionowym, s
$t_m^{\text{tH}}$	- czas mieszania w kierunku poziomym poprzecznym, s
$t^{\text{max}}, t_{\text{max}}$	- czas wystąpienia maksymalnego stężenia, s
$t_{\text{max,p}}$	- czas wystąpienia maksymalnego stężenia w przekroju, s
$t_{\text{max,f}}$	- faktyczny czas wystąpienia maksymalnego stężenia, s
$t^*$	- czas wystąpienia maksymalnej zmiany stężenia, s
$V_x, V_y, V_z$	- składowe prędkości przepływu w kierunkach: x, y, z, m/s
$Y, Z, T$	- funkcje składowe dla stężenia zanieczyszczeń
$x$	- współrzędna pozioma w kierunku przepływu rzeki, m
$x_1$	- współrzędna ruchoma, m
$y, y_1$	- współrzędna pozioma w kierunku prostopadłym do osi x, m
$z, z_1$	- współrzędna pionowa, m

### Alfabet grecki:

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	- parametry
$\Delta t$	- czas trwania emisji zanieczyszczenia, s
$\Delta x$	- droga przemieszczenia zanieczyszczenia w czasie $\Delta t$ , m
$\delta(\dots)$	- funkcja delta - Diraca, $\text{m}^{-1}$
$\xi_0, \zeta_0$	- współrzędne punktu dla źródła zanieczyszczeń, m
$2\xi$	- szerokość strefy dopływających zanieczyszczeń, m
$2\zeta$	- wysokość strefy dopływających zanieczyszczeń, m

## Wprowadzenie

Substancje obecne w środowisku wodnym ulegają rozprzestrzenieniu w wyniku zachodzenia różnych procesów, takich jak: adwekcja, dyfuzja molekularna, dyfuzja turbulentna. Dodatkowym efektem wpływającym na rozproszenie zanieczyszczeń w środowisku jest efekt dyspersji masy będący efektem nierównomiernego rozkładu prędkości w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu wody. Równaniem uwzględniającym wymienione procesy jest równanie adwekcji - dyfuzji w stanach nieustalonych [1-6]. Rozwiązanie takiego równania w przypadku ogólnym jest możliwe tylko metodami numerycznymi. W wielu jednak sytuacjach wystarczającą informację o sposobie rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń można uzyskać z analitycznych rozwiązań takiego równania dla pewnych szczególnych przypadków rozkładu stężeń w czasie i przestrzeni i prostej geometrii ośrodka, w którym występuje przepływ. Rozwiązania analityczne umożliwiają szybkie uzyskanie przybliżonej informacji o czasie wystąpienia określonej wartości stężenia w określonym przekroju kontrolno-pomiarowym, oszacowanie czasu trwania stężeń przewyższających wartość uznaną za bezpieczną, wyznaczenie stopnia wymieszania z wodami cieką itp. W artykule przeanalizowany zostanie przypadek adwekcyjnego transportu zanieczyszczeń z uwzględnieniem dwukierunkowej dyspersji poprzecznej w rzece o korycie prostokątnym. Wyniki uzyskane metodami numerycznymi przeznaczonymi do rozwiązywania równań różniczkowych mogą być obciążone wieloma błędami numerycznymi. Rozwiązanie analityczne równania transportu masy, co prawda uzyskane tylko dla pewnych przypadków propagacji zanieczyszczeń, pozbawione jest jednak takich błędów i może być dodatkowo wykorzystane do oceny jakości wyników uzyskiwanych metodami numerycznymi.

### 1. Model transportu masy

W niniejszej pracy analizowany jest transport zanieczyszczeń w środowisku wodnym wywołany adwekcją wzdłużną (wzdłuż cieką lub kanału) oraz dyfuzją w płaszczyźnie normalnej do kierunku przepływu. Model takiego transportu może być opisany następującym równaniem różniczkowym [1-3, 7-25]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V_x \frac{\partial c}{\partial x} = D_y \frac{\partial^2 c}{(\partial y)^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{(\partial z)^2} - r(c) \quad (1.1)$$

Równanie (1.1) uwzględnia szybkość procesu zaniku zanieczyszczenia. Szybkość procesu opisano mechanizmem jednocząsteczkowym pierwszego rzędu  $r(c) = -kc$  [1, 4, 10, 26].

Rozwiązanie szczególne równania (1.1) może być wykorzystane między innymi do wyznaczenia stopnia wymieszania z wodami odbiornika [25]

lub śledzenia przemieszczania się zanieczyszczeń w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przepływu z upływem czasu.

## 2. Rozwiązanie równania transportu zanieczyszczeń

Przed przystąpieniem do rozwiązania równania (1.1) należy dokonać jego przekształcenia do postaci niezależnej od współrzędnej  $x$ . W tym celu wprowadzona zostanie tzw. współrzędna ruchoma  $x_1$  dana wzorem:

$$x_1 = x - V_x t \quad (2.1)$$

oraz nowe współrzędne:  $t_1, y_1, z_1$  takie, że:

$$t_1 = t \quad (2.2)$$

$$y_1 = y \quad (2.3)$$

$$z_1 = z \quad (2.4)$$

W związku z tym pochodne stężenia  $c(y,z,t)$  w równaniu (1.1) względem nowych zmiennych:  $t_1, x_1, y_1, z_1$  będą następujące:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_1} + \frac{\partial c}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial c}{\partial t} 1 + \frac{\partial c}{\partial x_1} (-V_x) + \frac{\partial c}{\partial y_1} 0 + \frac{\partial c}{\partial z_1} 0 = \frac{\partial c}{\partial t} - V_x \frac{\partial c}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial c}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial c}{\partial t} 0 + \frac{\partial c}{\partial x_1} 1 + \frac{\partial c}{\partial y_1} 0 + \frac{\partial c}{\partial z_1} 0 = \frac{\partial c}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial y} &= \frac{\partial c}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial c}{\partial t_1} 0 + \frac{\partial c}{\partial x_1} 0 + \frac{\partial c}{\partial y_1} 1 + \frac{\partial c}{\partial z_1} 0 = \frac{\partial c}{\partial y_1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial z} &= \frac{\partial c}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial c}{\partial t_1} 0 + \frac{\partial c}{\partial x_1} 0 + \frac{\partial c}{\partial y_1} 0 + \frac{\partial c}{\partial z_1} 1 = \frac{\partial c}{\partial z_1}\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right) \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{\partial c}{\partial y_1} \right) 1 = \frac{\partial^2 c}{\partial y_1^2}\quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{\partial c}{\partial z} \right) \frac{\partial z_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{\partial c}{\partial z_1} \right) 1 = \frac{\partial^2 c}{\partial z_1^2}\quad (2.10)$$

Podstawiając nowe postacie pochodnych r.: (2.5), (2.6) do równania (1.1) oraz korzystając z równości (2.9), (2.10), otrzymujemy nową postać równania różniczkowego:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - kc\quad (2.11)$$

Czas  $t$  w tym równaniu odnosi się do stężenia w przekroju  $x = V_x t$  (transport adwekcyjny).

Przedstawmy całkę ogólną równania (2.11) za pomocą iloczynu trzech funkcji:

$$c = Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t)\quad (2.12)$$

( $Y(y)$ ,  $Z(z)$ ,  $T(t)$ ) - funkcje zależne tylko od jednej współrzędnej, odpowiednio od:  $y$ ,  $z$ ,  $t$ .

Przy takiej postaci całki ogólnej równanie (2.11) przyjmie następującą formę:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + k = D_y \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + D_z \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\quad (2.13)$$

Przyjmijmy, że każdy ze składników tego równania jest równy innej ujemnej liczbie i wtedy:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + k = -\alpha^2\quad (2.14)$$

$$D_y \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2\quad (2.15)$$

$$D_z \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\gamma^2 \quad (2.16)$$

Stąd związek między liczbami jest następujący:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad (2.17)$$

Równanie (2.14) odpowiedzialne jest za zmiany stężeń w czasie  $t$ , (2.15) - za dyfuzyjny transport w kierunku  $y$  (w poziomie, po szerokości rzeki), (2.16) - za dyfuzyjny transport w kierunku  $z$  (w pionie, po głębokości rzeki).

Napisanie całki ogólnej równania (2.11) wymagać więc będzie rozwiązania trzech niezależnych równań różniczkowych: (2.14), (2.15), (2.16).

Równania: (2.14), (2.15), (2.16) są zwyczajnymi równaniami różniczkowymi pierwszego (r.(2.14) lub drugiego stopnia (r.:(2.15), (2.16)) o stałych współczynnikach. Ich rozwiązania są następujące [27-29]:

$$T = C_\alpha \cdot \exp(-kt) \cdot \exp(-\alpha^2 t) \quad (2.18)$$

$$Y = C_{\beta,1} \cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{D_y}} y\right) + C_{\beta,2} \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{D_y}} y\right) \quad (2.19)$$

$$Z = C_{\gamma,1} \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{D_y}} z\right) + C_{\gamma,2} \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{D_y}} z\right) \quad (2.20)$$

W celu wyznaczenia całki szczególnej równania (2.11) konieczne jest podanie:

- warunku początkowego w przykładowej postaci:

$$c(y,z,t) = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0, x \geq 0, y \in \langle 0; 2S \rangle, z \in \langle 0; 2H \rangle \quad (2.21)$$

- warunku brzegowego w przykładowej postaci:

$$c(y,z,t) = c_0(y,z) \quad \text{dla} \quad t = 0 \text{ lub } t \geq 0, x = 0, y \in \langle 0; 2S \rangle, z \in \langle 0; 2H \rangle \quad (2.22)$$

oraz warunków dla pochodnych stężenia:  $\partial c / \partial y$ ,  $\partial c / \partial z$  na granicy ośrodków woda - powierzchnia koryta rzeki. W przypadku koryta o przekroju prostokątnym (rys. 1):

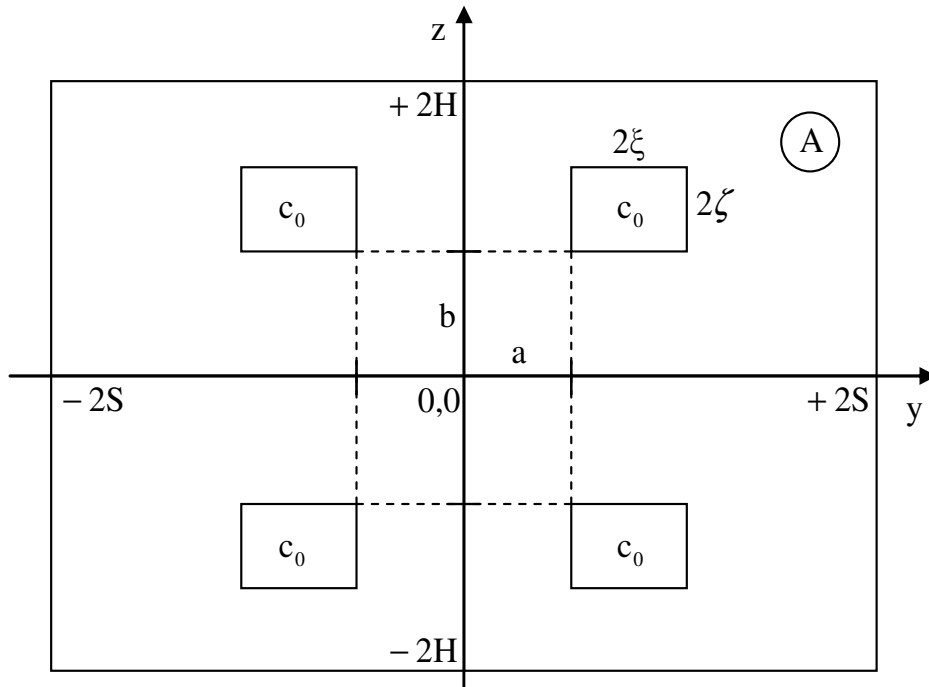
$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad \text{dla} \quad y = \{\pm 2S, 0\}, t \geq 0, x \geq 0, z \in \langle 0; 2H \rangle \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad \text{dla} \quad z = \{\pm 2H, 0\}, t \geq 0, x \geq 0, y \in \langle 0; 2S \rangle \quad (2.24)$$

Przyjęcie warunków (2.23), (2.24) oznacza, że granica ośrodków woda - powierzchnia koryta rzeki jest dla zanieczyszczeń dyfuzyjnie nieprzenikliwa. Wartości liczb  $(\beta, \gamma)$  można wyznaczyć za pomocą pochodnych funkcji  $(Y, Z)$ , korzystając z warunków (2.23) i (2.24). W związku z tym:

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\beta}{\sqrt{D_y}} C_{\beta,1} \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{D_y}} y\right) + \frac{\beta}{\sqrt{D_y}} C_{\beta,2} \cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{D_y}} y\right) = 0 \quad \text{dla} \quad y = \{\pm 2S, 0\} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{\gamma}{\sqrt{D_y}} C_{\gamma,1} \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{D_y}} z\right) + \frac{\gamma}{\sqrt{D_y}} C_{\gamma,2} \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{D_y}} z\right) = 0 \quad \text{dla} \quad z = \{\pm 2H, 0\} \quad (2.26)$$



Rys. 1. Schemat przekroju poprzecznego rzeki (koryto prostokątne) z zaznaczonym rozkładem. Stężenie  $c_0(y,z)$ . Stężenie  $c_0$  ma stałą wartość w obszarze prostokąta o wymiarach  $(2\xi, 2\zeta)$ . Na zewnątrz prostokąta  $c_0 = 0$ . Prostokąt przesunięty jest na odległość  $a$  od lewego brzegu rzeki oraz znajduje się na wysokości  $b$  nad dnem rzeki. Rzeczywista rzeka o szerokości  $2S$  oraz głębokości  $2H$  reprezentowana jest przez ćwiartkę A układu współrzędnych

Spełnienie warunków (2.25), (2.26) dla  $y = 0$  jest możliwe tylko wtedy, gdy:  $C_{\beta,2} = 0$ ,  $C_{\gamma,2} = 0$ , ponieważ funkcja  $\cos(0) = 1$ . W tej sytuacji:

$$-\frac{\beta}{\sqrt{D_y}} C_{\beta,1} \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{D_y}} y\right) = 0 \quad \text{dla } y = \pm 2S \quad (2.27)$$

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{D_y}} C_{\gamma,1} \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{D_y}} z\right) = 0 \quad \text{dla } z = \pm 2H \quad (2.28)$$

Z równań (2.27) i (2.28) wynika, że liczb  $(\beta, \gamma)$  jest nieskończenie wiele i ich wartość zależy od wielokrotności kąta  $\pi$ , a więc:

$$\beta_n = \frac{n\pi\sqrt{D_y}}{2S} \quad \text{dla } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \quad (2.29)$$

$$\gamma_m = \frac{m\pi\sqrt{D_y}}{2H} \quad \text{dla } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \quad (2.30)$$

Nieskończenie wiele jest również liczb  $\alpha$ , co wynika ze związku (2.17).

W tej sytuacji rozwiązanie równania (2.11) dla koryta prostokątnego jest kombinacją liniową iloczynów funkcji: (2.18), (2.19), (2.20) (w przypadku liniowych równań różniczkowych liniowa kombinacja rozwiązań szczególnych jest również rozwiązaniem równania różniczkowego). Postać tego rozwiązania jest następująca:

$$c(y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_{m,n} \cos\left(\frac{n\pi}{2S} y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \cdot \exp(-kt) \cdot \exp\left(-\left(\frac{n^2\pi^2 D_y}{4S^2} + \frac{m^2\pi^2 D_z}{4H^2}\right) t\right) \quad (2.31)$$

Ponieważ funkcja cosinus jest parzysta, więc sumowanie w równaniu (2.31) może się przeprowadzić w zakresie  $\langle 0; +\infty \rangle$  z tym, że współczynniki  $C_{m,n}$  należy traktować jako dwukrotnie większe, z wyjątkiem sytuacji, gdy  $m = 0$ , a współczynnik  $n$  jest dowolny lub gdy  $n = 0$ , a współczynnik  $m$  jest dowolny. Przy takim założeniu:

$$c(y, z, t) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \sum_{m=0}^{m=+\infty} C_{m,n} \cos\left(\frac{n\pi}{2S} y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \cdot \exp(-kt) \cdot \exp\left(-\left(\frac{n^2\pi^2 D_y}{4S^2} + \frac{m^2\pi^2 D_z}{4H^2}\right) t\right) \quad (2.32)$$



Z uwagi na parzystość funkcji cosinus wyznaczenie współczynników  $C_{m,n}$  będzie wymagało przeprowadzenia obliczeń dla wszystkich czterech ćwiartek układu współrzędnych (rys. 1), mimo że rzeczywista rzeka reprezentowana jest tylko przez ćwiartkę A układu współrzędnych. Gdyby założyć, że poza ćwiartką A w pozostałych ćwiartkach stężenie jest zerowe, to wyznaczone współczynniki  $C_{m,n}$  byłyby takie same, inne natomiast byłyby iloczyny skalarne i kwadraty norm ciągu ortogonalnego  $\left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right]$ , występującego w rozwiązaniach: (2.31), (2.32).

W celu wyznaczenia wartości współczynników  $C_{m,n}$  należy skorzystać z szeregu ortogonalnego [15] wynikającego z rozwiązania (3.32) dla czasu  $t = 0$ , aproksymującego rozkład stężeń przedstawionych na rysunku 1, a więc:

$$c(y, z, t = 0) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \sum_{m=0}^{m=+\infty} C_{m,n} \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) = c_0(y, z) \quad (2.33)$$

Ciąg  $\left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right]$  jest ortogonalny, ponieważ dla dwóch różnych wartości:  $m, n$  iloczyn skalarny jest równy zeru [30] - można to wykazać bezpośrednim rachunkiem.

Korzystając z twierdzenia o najlepszej aproksymacji kwadratowej [30], współczynniki  $C_{m,n}$  można wyznaczyć z ilorazu: iloczynu skalarnego  $c_0(y, z)$  i ciągu ortogonalnego oraz kwadratu normy ciągu ortogonalnego, a więc:

$$C_{m,n} = \frac{\left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right)}{\left\| \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right\|^2} \quad (2.34)$$

$\|\dots\|^2$  - oznaczenie kwadratu normy,

$(\dots)$  - oznaczenie iloczynu skalarnego.

W zależności od wartości:  $m, n$  kwadraty norm są następujące (patrz rys. 1):

$$\left\| \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right\|_{m=0, n=0}^2 = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} 1 \cdot 1 \, dzdy = 16SH \quad (2.35)$$

$$\left\| \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right\|_{m \geq 1, n = 0}^2 = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} \cos^2\left(\frac{m\pi}{2H}y\right) dzdy = 8SH \quad (2.36)$$

$$\left\| \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right\|_{m=0, n \geq 1}^2 = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} \cos^2\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) dzdy = 8SH \quad (2.37)$$

$$\left\| \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right\|_{m \geq 1, n \geq 1}^2 = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} \cos^2\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos^2\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) dzdy = 4SH \quad (2.38)$$

W zależności od wartości:  $m, n$  iloczyny skalarne mają postać (patrz rys. 1):

$$\left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right)_{m=0, n=0} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot 1 dzdy = 16c_0\xi\zeta \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & \left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right)_{m \geq 1, n=0} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) dzdy = \\ & = c_0 \frac{32H}{m\pi} \xi \cos\left(\frac{m\pi(b+\zeta)}{2H}\right) \sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2H}\right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} & \left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right)_{m=0, n \geq 1} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) dzdy = \\ & = c_0 \frac{32S}{n\pi} \zeta \cos\left(\frac{n\pi(a+\xi)}{2S}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{2S}\right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} & \left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right)_{m, n} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) dzdy = \\ & = c_0 \frac{64SH}{mn\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi(b+\zeta)}{2H}\right) \sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2H}\right) \cos\left(\frac{n\pi(a+\xi)}{2S}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{2S}\right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ostatecznie, na podstawie wzoru (2.34), współczynniki  $C_{m,n}$  dane są następującymi wzorami:

$$C_{m=0, n=0} \stackrel{\text{r.:(2.39), (2.35)}}{=} c_0 \frac{\xi\zeta}{SH} \quad (2.43a)$$

$$C_{m \geq 1, n=0} \stackrel{\text{r.:(2.40), (2.36)}}{=} c_0 \frac{4\xi}{Sm\pi} \cos\left(\frac{m\pi(b+\zeta)}{2H}\right) \sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2H}\right) \quad (2.43b)$$

$$C_{m=0, n \geq 1} \stackrel{\text{r.:(2.41), (2.37)}}{=} c_0 \frac{4\zeta}{Hn\pi} \cos\left(\frac{n\pi(a+\xi)}{2S}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{2S}\right) \quad (2.43c)$$

$$C_{m,n} \stackrel{\text{r.:(2.42), (2.38)}}{=} c_0 \frac{16}{mn\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi(b+\zeta)}{2H}\right) \sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2H}\right) \cos\left(\frac{n\pi(a+\xi)}{2S}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{2S}\right) \quad (2.43d)$$

Dysponując współczynnikami  $C_{m,n}$  rozwiązanie (2.32), dla rozkładu stężeń przedstawionych na rysunku 1 przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} c(y, z, t) = & \left\{ c_0 \frac{\xi\zeta}{SH} + \right. \\ & + \sum_{m=1}^{m=+\infty} c_0 \frac{4\xi}{Sm\pi} \cos\left(\frac{m\pi(b+\zeta)}{2H}\right) \sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2H}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \exp\left(-\frac{m^2\pi^2 D_z}{4H^2}t\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{n=+\infty} c_0 \frac{4\zeta}{Hn\pi} \cos\left(\frac{n\pi(a+\xi)}{2S}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{2S}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D_y}{4S^2}t\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \sum_{m=1}^{m=+\infty} \left[ c_0 \frac{16}{mn\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi(b+\zeta)}{2H}\right) \sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2H}\right) \cos\left(\frac{n\pi(a+\xi)}{2S}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{2S}\right) \times \right. \\ & \left. \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \exp\left(-\left(\frac{n^2\pi^2 D_y}{4S^2} + \frac{m^2\pi^2 D_z}{4H^2}\right)t\right) \right] \left. \right\} \exp(-kt) \quad (2.44) \end{aligned}$$

Równanie (2.44) wykorzystano do obliczeń rozkładu stężeń w różnych przekrojach rzeki, których lokalizację określa czas  $t$ .

Stężenie  $c_0$  w równaniu (2.44) może być wyrażone za pomocą strumienia zanieczyszczenia wprowadzonego przez źródło zanieczyszczenia. Przy założeniu, że przepływ w rzece jest o wiele większy od wypływu ze źródła, stężenie:

$$c_0 = \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x \cdot 2\xi \cdot 2\zeta} \quad (2.45)$$

### 3. Wpływ zanieczyszczeń z nieskończenie małego otworu

Rozkład stężeń zanieczyszczeń, w przekroju początkowym, podczas wypływu z otworu o nieskończenie małych rozmiarach może być opisany za pomocą strumienia wprowadzanych zanieczyszczeń i funkcji delta - Diraca dla wymiarów liniowych. W tej sytuacji wymiary:  $2\xi, 2\zeta$  przyjmują wartości zerowe (rys. 1) i wtedy współrzędne źródeł są następujące:  $(a, b), (-a, b), (-a, -b), (a, -b)$ . Rozkład stężeń jest więc sumą czterech funkcji (warunek brzegowy):

$$\begin{aligned} c(y, z, t) = c_0(y, z) &= \frac{Q_{zrd} c_{zrd} \times \Delta t}{\Delta x} \cdot (\delta(a-y) \times \delta(b-z) + \delta(-a-y) \cdot \delta(b-z) + \\ &+ \delta(-a-y) \cdot \delta(-b-z) + \delta(a-y) \cdot \delta(-b-z)) = \\ &= \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \cdot (\delta(a-y) \times \delta(b-z) + \delta(-a-y) \cdot \delta(b-z) + \\ &+ \delta(-a-y) \cdot \delta(-b-z) + \delta(a-y) \cdot \delta(-b-z)) \\ &\text{dla } t = 0 \text{ lub } t \geq 0, x = 0, y \in \langle 0; 2S \rangle, z \in \langle 0; 2H \rangle \end{aligned} \quad (3.1)$$

Równanie (3.1) odnosi się do sytuacji, w której zanieczyszczenia wprowadzane są impulsowo w czasie  $\Delta t$  i przemieszczają się wzdłuż rzeki na drodze  $\Delta x$  lub dopływają w sposób ciągły i przemieszczają się wzdłuż rzeki z prędkością  $v_x$ . W zależności od wartości:  $m, n$  iloczyny skalarne, dla  $c_0(y, z)$  opisanego formułą (3.1), mają w tym przypadku postać:

$$\left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right)_{m=0, n=0} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot 1 dz dy = 4 \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right)_{m \geq 1, n=0} &= \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) dz dy = \\ &= 4 \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \cos\left(\frac{m\pi}{2H}b\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right)_{m=0, n \geq 1} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) dz dy = \\ & = 4 \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \cos\left(\frac{n\pi}{2S}a\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \right)_{m, n} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) dz dy = \\ & = 4 \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \cos\left(\frac{m\pi}{2H}a\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2S}b\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dla różnych wartości:  $m, n$  kwadraty norm pozostają bez zmian (r.: (2.35), (2.36), (2.37), (2.38)).

Ostatecznie, na podstawie wzoru (2.34), współczynniki  $C_{m, n}$  dane są następującymi wzorami:

$$C_{m=0, n=0} \stackrel{\text{r.:(3.2), (2.35)}}{=} \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \frac{1}{4SH} \quad (3.6)$$

$$C_{m \geq 1, n=0} \stackrel{\text{r.:(3.3), (2.36)}}{=} \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \frac{1}{2SH} \cos\left(\frac{m\pi}{2H}b\right) \quad (3.7)$$

$$C_{m=0, n \geq 1} \stackrel{\text{r.:(3.4), (2.37)}}{=} \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \frac{1}{2SH} \cos\left(\frac{n\pi}{2S}a\right) \quad (3.8)$$

$$C_{m, n} \stackrel{\text{r.:(3.5), (2.38)}}{=} \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \frac{1}{SH} \cos\left(\frac{m\pi}{2H}b\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2S}a\right) \quad (3.9)$$

Dysponując współczynnikami  $C_{m, n}$ , rozwiązanie (2.32), dla rozkładu stężeń opisanych za pomocą formuły (3.1), przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} c(y, z, t) = & \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \left\{ \frac{1}{4SH} + \sum_{m=1}^{m=+\infty} \frac{1}{2SH} \cos\left(\frac{m\pi}{2H}b\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 D_z}{4H^2} t\right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{2SH} \cos\left(\frac{n\pi}{2S}a\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D_y}{4S^2} t\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \sum_{m=1}^{m=+\infty} \left[ \frac{1}{SH} \cos\left(\frac{m\pi}{2H}b\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2S}a\right) \cdot \right. \\ & \left. \left. \cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \exp\left(-\left(\frac{n^2 \pi^2 D_y}{4S^2} + \frac{m^2 \pi^2 D_z}{4H^2}\right) t\right) \right] \right\} \exp(-kt) \end{aligned} \quad (3.10)$$

#### 4. Wpływ zanieczyszczeń z nieskończenie wąskiej pionowej lub poziomej szczeliny

Rozkład stężeń zanieczyszczeń, w przekroju początkowym, podczas wypływu z pionowej szczeliny nieskończenie wąskiej może być opisany za pomocą strumienia wprowadzanych zanieczyszczeń i funkcji delta - Diraca dla wymiarów liniowych. W tej sytuacji wymiar:  $2\xi$  przyjmuje wartość zero, natomiast  $2\zeta = 2H$  (rys. 1) i wtedy współrzędne źródeł są następujące:  $a, -a$  dla  $z \in < 0, 2H >$  oraz  $z \in < -2H, 0 >$ . Rozkład stężeń jest więc sumą czterech funkcji (warunek brzegowy):

$$\begin{aligned} c(y, z, t) &= c_0(y, z) = \frac{Q_{zrd} c_{zrd} \cdot \Delta t}{\Delta x \times 2H} \cdot ((2 \cdot \delta(a - y) + 2 \cdot \delta(-a - y))) = \\ &= \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x H} \cdot (\delta(a - y) + \delta(-a - y)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\text{dla } t = 0 \text{ lub } t \geq 0, x = 0, y \in < 0; 2S >, z \in < 0; 2H >$$

W zależności od wartości:  $m, n$  iloczyny skalarne, dla  $c_0(y, z)$  opisanego formułą (5.1), mają w tym przypadku postać:

$$\left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S} y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \right)_{m=0, n=0} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot 1 dz dy = 8 \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \quad (4.2)$$

$$\left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S} y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \right)_{m \geq 1, n=0} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) dz dy = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S} y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \right)_{m=0, n \geq 1} &= \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2S} y\right) dz dy = \\ &= 8 \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \cos\left(\frac{n\pi}{2S} a\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\left( c_0(y, z), \cos\left(\frac{n\pi}{2S} y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \right)_{m, n} = \int_{-2S}^{+2S} \int_{-2H}^{+2H} c_0(y, z) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2S} y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) dz dy = 0 \quad (4.5)$$

Dla różnych wartości:  $m, n$  kwadraty norm pozostają bez zmian (r.: (2.35), (2.36), (2.37), (2.38)).

Ostatecznie, na podstawie wzoru (2.34), współczynniki  $C_{m,n}$  dane są następującymi wzorami:

$$C_{m=0, n=0} \stackrel{\text{r.:(4.2), (2.35)}}{=} \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \frac{1}{2SH} \quad (4.6)$$

$$C_{m \geq 1, n=0} \stackrel{\text{r.:(4.3), (2.36)}}{=} 0 \quad (4.7)$$

$$C_{m=0, n \geq 1} \stackrel{\text{r.:(4.4), (2.37)}}{=} \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \frac{1}{SH} \cos\left(\frac{n\pi}{2S} a\right) \quad (4.8)$$

$$C_{m,n} \stackrel{\text{r.:(4.5), (2.38)}}{=} 0 \quad (4.9)$$

Dysponując współczynnikami  $C_{m,n}$ , rozwiązanie (2.32), dla rozkładu stężeń opisanych za pomocą formuły (4.1), przyjmuje postać:

$$c(y,z,t) = \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \left\{ \frac{1}{2SH} + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{SH} \cos\left(\frac{n\pi}{2S} a\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2S} y\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D_y}{4S^2} t\right) \right\} \exp(-kt) \quad (4.10)$$

Równanie (4.10) opisuje rozkład stężeń po szerokości rzeki dla dowolnej wartości  $z \in \langle 0, 2H \rangle$ .

W przypadku wypływu z poziomej, nieskończenie wąskiej szczeliny o szerokości  $2S$  odsuniętej od osi  $0Y^{\rightarrow}$  na odległość:  $b, -b$  (rys. 1) rozwiązanie równania (2.32) jest podobne do (4.10) z tym, że konieczne jest dokonanie w tym równaniu następujących podstawień:  $n \leftarrow m, a \leftarrow b, y \leftarrow z, S \leftarrow H, D_y \leftarrow D_z$  prowadzących do następującej formuły:

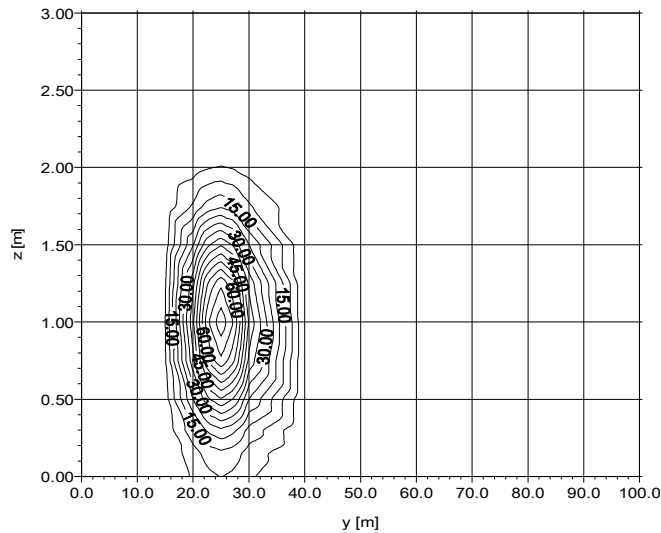
$$c(y,z,t) = \frac{Q_{zrd} c_{zrd}}{V_x} \left\{ \frac{1}{2SH} + \sum_{m=1}^{m=+\infty} \frac{1}{SH} \cos\left(\frac{m\pi}{2H} b\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 D_z}{4H^2} t\right) \right\} \exp(-kt) \quad (4.11)$$

Równanie (4.11) opisuje rozkład stężeń po głębokości rzeki dla dowolnej wartości  $y \in \langle 0, 2S \rangle$ .

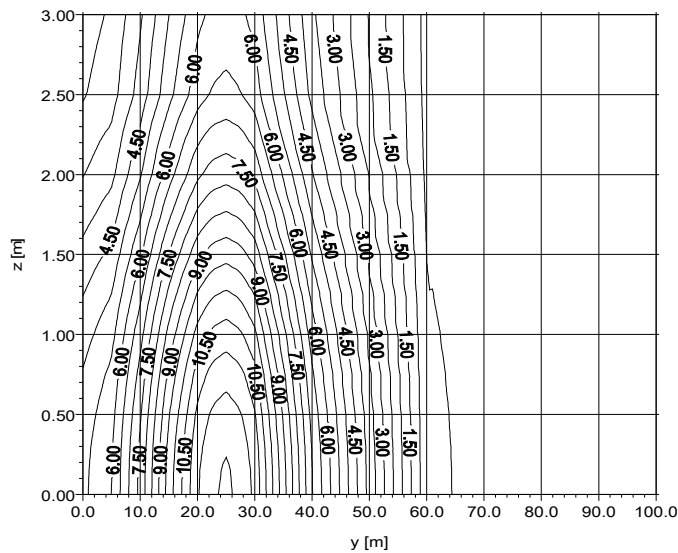
## 5. Własności rozwiązania dla źródła o skończonych rozmiarach

W celu graficznego zobrazowania przykładowego rozkładu stężenia przestrzeni  $(y, z)$  przeprowadzono obliczenia z wykorzystaniem równania (2.44) dla następujących danych:  $c_0 = 100 \text{ g/m}^3$ ,  $a = 20 \text{ m}$ ,  $\xi = 5 \text{ m}$ ,  $S = 50 \text{ m}$ ,  $b = 0,5 \text{ m}$ ,  $\zeta = 0,5 \text{ m}$ ,

$H = 1,5$  m,  $D_y = 0,05$  m<sup>2</sup>/s,  $D_z = 0,0005$  m<sup>2</sup>/s,  $M = 4000$ ,  $N = 4000$ ,  $k = 0$ . Rozkład stężeń po czasie 100 sekund propagacji zanieczyszczenia przedstawiono na rysunku 2. Z wcześniejszych badań [1, 4, 30] wynika, że maksimum stężenia zanieczyszczenia wprowadzonego ekscentrycznie w przekroju wykazuje tendencję przemieszczania się do bliższych krawędzi przekroju rzeki (bliższego brzegu oraz dna lub powierzchni zwierciadła wody). W rozpatrywanym przypadku maksymalne stężenia przekrojów, tzn. w kolejnych chwilach, przemieszczają się będą do punktu o współrzędnych ( $y = 0$ ,  $z = 0$ ) (rys. 2-4).

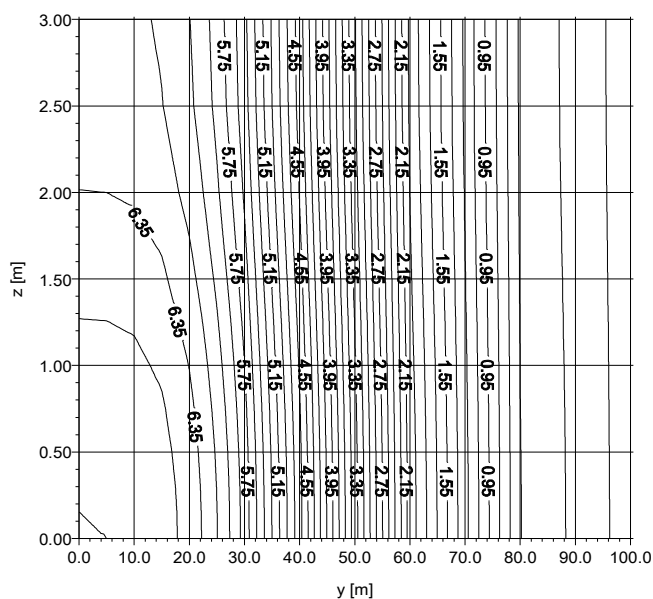
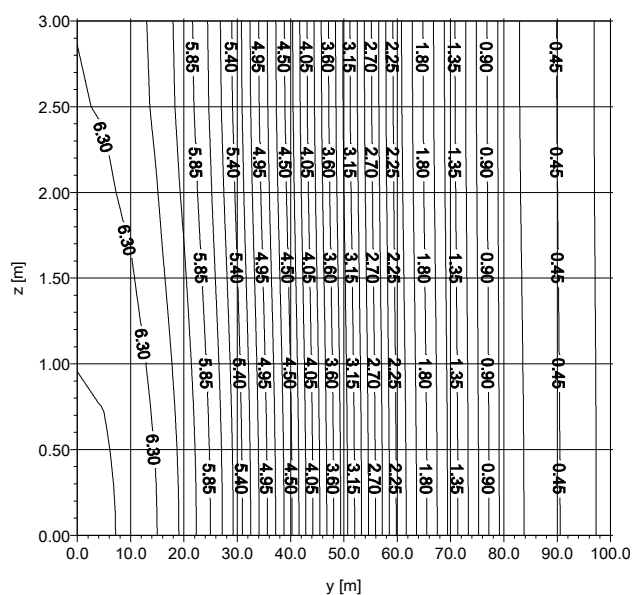


Rys. 2. Rozkład stężeń w przekroju poprzecznym rzeki w chwili  $t = 100$  s



Rys. 3. Rozkład stężeń w przekroju poprzecznym rzeki w chwili  $t = 2000$  s



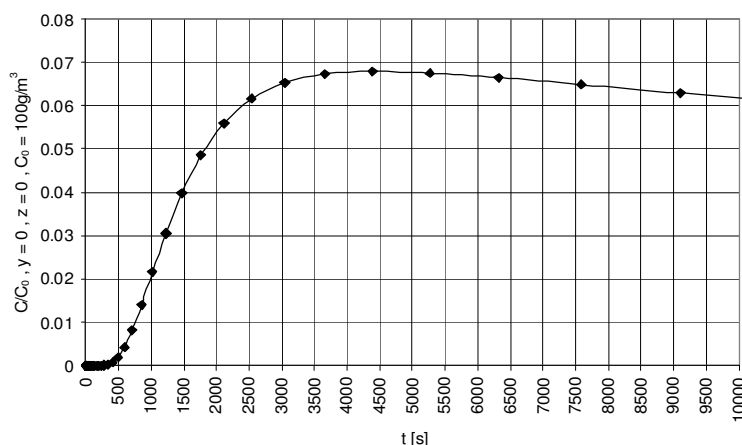
Rys. 4. Rozkład stężeń w przekroju poprzecznym rzeki w chwili  $t = 6250$  sRys. 5. Rozkład stężeń w przekroju poprzecznym rzeki w chwili  $t = 7500$  s

Należy jednak zwrócić uwagę, że czas, po którym maksymalne stężenie przekroju (w odniesieniu do całego przekroju) wystąpi w narożu przekroju (w tym wypadku w punkcie o współrzędnych  $y = 0, z = 0$ ), różni się od czasu wystąpienia maksymalnego stężenia w narożu przekroju. Maksymalne stężenie w narożu przekroju pojawia się wcześniej przed wystąpieniem w tym miejscu maksymalnego

stężenia przekroju. Ponadto maksymalne stężenie, jakie pojawi się w narożu przekroju, jest większe od, obserwowanej w tym miejscu, wartości maksymalnego stężenia przekroju. Maksymalne stężenie przekroju o wartości  $6,653 \text{ g/m}^3$  w punkcie o współrzędnych:  $y = 0, z = 0$  wystąpi po czasie około 6250 sekund (rys. 4). Później stężenia w narożu ( $y = 0, z = 0$ ) będą maleć (rys. 5). Maksymalna wartość stężenia przekroju po czasie 7500 sekund wynosi  $6,496 \text{ g/m}^3$ . Maksymalne stężenie, jakie w ogóle wystąpi w narożu, jest większe od maksymalnego stężenia przekroju i wynosi  $6,791 \text{ g/m}^3$  (rys. 6). Pojawi się jednak wcześniej, tj. w chwili 4250 sekund (rys. 6).

Możliwe jest oszacowanie czasu wystąpienia maksymalnego stężenia przekroju w narożu i maksymalnego stężenia w narożu. Rozwiązanie równania adwekcji z uwzględnieniem dyfuzji w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przepływu dla wymuszenia impulsowego w obszarze nieograniczonym ma postać:

$$c(y, z, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^2 \sqrt{D_y D_z}} \frac{M_s}{(2H)} \exp\left(-\frac{(y - \xi_0)^2}{4D_y t} - \frac{(z - \zeta_0)^2}{4D_z t}\right) \quad (5.1)$$



Rys. 6. Przebieg bezwymiarowych stężeń  $C/C_0$  w czasie w narożu przekroju ( $y = 0, z = 0$ )

Współrzędne położenia cząstki wprowadzonej substancji można traktować jak zmienne losowe. Porównując wzór (5.1) z dwuwymiarowym rozkładem normalnym, mającym średnie:  $(\xi_0, \zeta_0)$  i wariancje:  $(\sigma_y, \sigma_z)$  o zmiennych nieskorelowanych, w postaci:

$$f(y, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_z} \exp\left(-\frac{(y - \xi_0)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - \zeta_0)^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (5.2)$$

rozproszenie cząstek substancji wokół punktu o współrzędnych  $(\xi_0, \zeta_0)$  może być przybliżone następującymi relacjami:

$$\sigma_y^2 = 2D_y t \quad (5.3)$$

$$\sigma_z^2 = 2D_z t \quad (5.4)$$

W przypadku ośrodka ograniczonego (rys. 1) rozproszenie:

$$\sigma_y \approx a + \xi \quad (5.5)$$

$$\sigma_z \approx b + \zeta \quad (5.6)$$

W związku z tym czas  $t_{\max, p}$  przemieszczenia maksymalnego stężenia przekroju do naroża przekroju może być oszacowany z zależności:

$$t_{\max, p} = \max \left[ \frac{(a+\xi)^2}{2D_y}, \frac{(b+\zeta)^2}{2D_z} \right] \quad (5.7)$$

W tym w przypadku dla:  $a = 20$  m,  $\xi = 5$  m,  $b = 0,5$  m,  $\zeta = 0,5$  m,  $D_y = 0,05$  m<sup>2</sup>/s,  $D_z = 0,0005$  m<sup>2</sup>/s czas  $t_{\max, p} = 6250$  s, co jest zgodne z wynikami obliczeń uzyskanymi z równania (2.44) (rys. 4). Analiza charakteru przemieszczania się maksymalnego stężenia przekroju (rys. 2, 4) pokazuje, że przemieszczeniu w pionie (kierunek z) nie towarzyszyło przemieszczenie w poziomie (kierunek y). Świadczy to o nieskorelowaniu rozproszenia cząstek substancji w kierunkach wzajemnie prostopadłych.

Oszacowanie czasu wystąpienia stężenia maksymalnego, jakie w ogóle pojawi się w narożu, jest trudniejsze. Rozpraszanie cząstek substancji w kierunku y oraz z należałoby traktować jak proces losowy o zmiennych skorelowanych. Przybliżone czasy przemieszczeń cząstek substancji w kierunku poziomym ( $t_y$ ) i pionowym ( $t_z$ ) można obliczyć ze wzorów:

$$t_y = \frac{(a+\xi)^2}{2D_y} \quad (5.8)$$

$$t_z = \frac{(b+\zeta)^2}{2D_z} \quad (5.9)$$

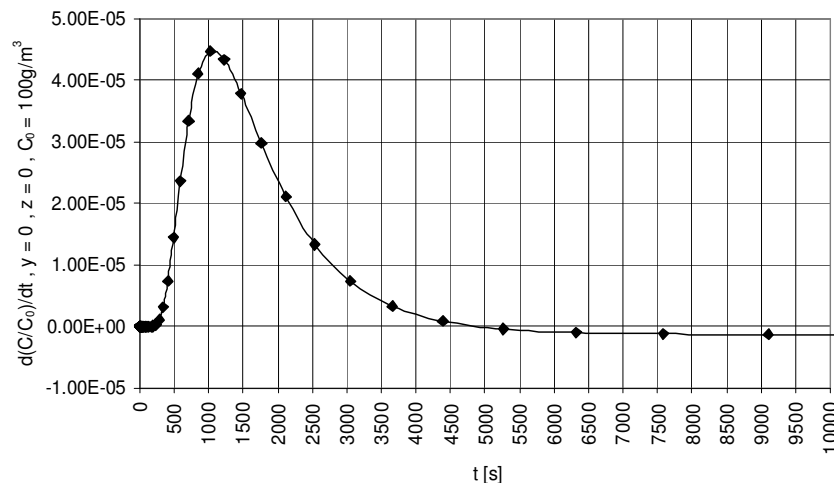
Jeżeli czas  $t_z \leq t_y$ , to można przyjmować, że w czasie  $t_z$  cząsteczki substancji przebiegły się w kierunku y na drodze  $\sqrt{t_z 2D_y}$ , a więc pozostała droga do naroża w tym kierunku wynosi  $a+\xi - \sqrt{t_z 2D_y}$ . W związku z tym czas  $t_{\max}$  wystąpienia maksymalnego stężenia w narożu można oszacować ze wzoru:

$$t_{\max} = t_z + \frac{(a+\xi - \sqrt{t_z 2D_y})^2}{2D_y} \quad (5.10)$$

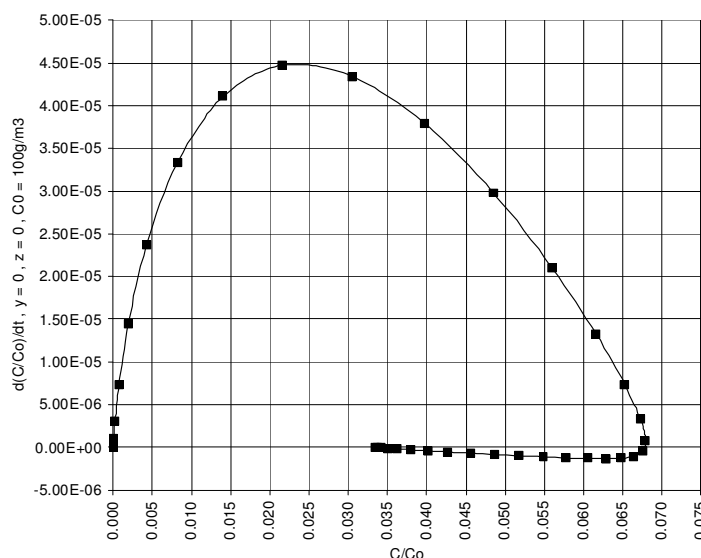
W rozpatrywanym przypadku uzyskany ze wzoru (5.10) czas  $t_{\max} = 3250$  s, podczas gdy faktycznie ten czas jest równy 4250 s (rys. 6). Czas  $t_{\max}$  jest mniejszy od faktycznego, a popełniony błąd względny wynosi więc około 25%. Przeprowadzono szereg obliczeń dla różnych kombinacji wartości:  $a$ ,  $\xi$ ,  $S$ ,  $b$ ,  $\zeta$ ,  $H$ ,  $D_y$ ,  $D_z$  (tab. 1); (podczas przyrównywania pochodnych stężenia względem czasu do zera wartości:  $S$ ,  $H$  nie mają znaczenia). Dla innych wartości parametrów modelu propagacji zanieczyszczeń (tab. 1) błąd ten był mniejszy. Szczegółowa analiza wyników obliczeń wskazuje jednak (tab. 1, kol.: 9, 13, 14, 15), że faktyczny czas  $t_{\max,f}$  wystąpienia maksymalnego stężenia w narożu zawarty jest w przedziale  $\langle t_{\max,p}, t_{\max} \rangle$  i dokładniejsze jego oszacowanie jest następujące:

$$t_{\max, f} = 0.5 \cdot (t_{\max,p} + t_{\max}) \quad (5.11)$$

Obliczenia zmian stężeń w czasie dla parametrów modelu zawartych w tabeli 1 umożliwiły sporządzenie wykresów przedstawiających przebieg pochodnej  $d(C/C_0)/dt$  względem czasu  $t$  w narożu przekroju ( $y = 0$ ,  $z = 0$ ) lub względem bezwymiarowego stężenia  $C/C_0$ . Przykładowe wykresy dla wybranych wartości parametrów:  $a$ ,  $\xi$ ,  $S$ ,  $b$ ,  $\zeta$ ,  $H$ ,  $D_y$ ,  $D_z$  przedstawiono na rysunkach 7 i 8. Na podstawie wielu tego typu wykresów wyznaczono chwilę wystąpienia maksymalnych zmian stężeń  $d(C/C_0)/dt_{\max}$ . Maksymalne zmiany stężeń pojawiają się w przybliżeniu (tab. 1, kol. 12) w  $10/47$  czasu wystąpienia maksymalnego stężenia w narożu przekroju ( $y = 0$ ,  $z = 0$ ) (w przypadku wykresów na rysunkach 6 i 7 ułamek ten wynosi  $10/40$ ) lub w chwili wystąpienia stężenia (tab. 1, kol. 10) stanowiącego  $10/32$  stężenia maksymalnego, jakie pojawi się w narożu przekroju ( $y = 0$ ,  $z = 0$ ) (w przypadku wykresu 8 ułamek ten wynosi  $10/31$ ).



Rys. 7. Przebieg pochodnej  $d(C/C_0)/dt$  w czasie w narożu przekroju ( $y = 0$ ,  $z = 0$ ), ( $a = 20$  m,  $\xi = 5$  m,  $S = 50$  m,  $b = 0,5$  m,  $\zeta = 0,5$  m,  $H = 1,5$  m,  $D_y = 0,05$  m<sup>2</sup>/s,  $D_z = 0,0005$  m<sup>2</sup>/s)



Rys. 8. Przebieg pochodnej  $d(C/C_0)/dt$  względem bezwymiarowego stężenia  $C/C_0$  w narożu przekroju ( $y = 0, z = 0$ ), ( $a = 20$  m,  $\xi = 5$  m,  $S = 50$  m,  $b = 0,5$  m,  $\zeta = 0,5$  m,  $H = 1,5$  m,  $D_y = 0,05$  m<sup>2</sup>/s,  $D_z = 0,0005$  m<sup>2</sup>/s)

Gdyby substancja rozprzestrzeniała się w ośrodku nieograniczonym, to w przypadku wymuszenia impulsowego czas  $t^{\max}$  wystąpienia stężenia maksymalnego w punkcie ( $y = 0, z = 0$ ) można obliczyć z warunku  $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$  z wykorzystaniem równania (5.1) i wtedy:

$$t^{\max} = \frac{(\xi_0)^2}{4D_y} + \frac{(\zeta_0)^2}{4D_z} \quad (5.12)$$

(w tym przypadku przyjmujemy, że:  $\xi_0 = a + \xi$ ,  $\zeta_0 = b + \zeta$ )

Chwilę  $t^*$  wystąpienia maksymalnej zmiany stężenia w punkcie ( $y = 0, z = 0$ ) można obliczyć z warunku  $\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} = 0$  z wykorzystaniem równania (5.1) i wtedy:

$$t^* = \left( \frac{(\xi_0)^2}{4D_y} + \frac{(\zeta_0)^2}{4D_z} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = t^{\max} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.13)$$

W tej sytuacji, w ośrodku nieograniczonym, maksymalnym zmianom stężeń odpowiadać będzie iloraz czasów:

$$\frac{t^*}{t^{\max}} = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx \frac{10}{34} \quad (5.14)$$

Tabela 1  
**Wyniki obliczeń dotyczących maksymalnego stężenia oraz maksymalnej zmiany stężenia w czasie w narożu przekroju**  
**( $y = 0, z = 0$ ) dla różnych parametrów:  $a, \xi, S, b, \zeta, H, D_y, D_z$**

Lp.	a	$\xi$	S	b	$\zeta$	H	$D_y$	$D_z$	$t(C_{max})$	Położenie ( $dc/dt$ ) <sub>max</sub> w odnie- szeniu do stężenia c	$t[(dc/dt)_{max}]$	Położenie ( $dc/dt$ ) <sub>max</sub> w odnie- szeniu do czasu t	$t_{max-p}$ r.(6.7)	$t_{max}$ r.(6.10)	$0.5(t_{max-p} + t_{max})$
1	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-01	5E-04	808	10/31	212	10/38	1000	669	835
2	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-04	5E-04	600000	10/32	109476	10/55	625000	577000	601000
3	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-04	5E-03	600000	10/32	109476	10/55	625000	609389	617195
4	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-04	5E-02	600000	10/32	109476	10/55	625000	620020	622510
5	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-04	5E-01	600000	10/32	109476	10/55	625000	623421	624210
6	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-03	5E-01	62500	10/33	11754	10/53	62500	62002	62251
7	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-01	5E-01	625	10/32	108	10/58	625	577	601
8	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-02	5E-04	4250	10/31	1070	10/40	6250	3250	4750
9	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-03	5E-04	56052	10/33	11755	10/48	62500	48689	55595
10	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-02	5E-03	6019	10/32	1262	10/48	6250	4869	5560
11	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-03	5E-02	62500	10/33	11755	10/53	62500	60939	61720
12	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-02	5E-02	6018	10/32	1262	10/48	6250	5770	6010
13	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-03	5E-03	62500	10/33	11755	10/53	62500	57700	60100
14	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-01	5E-02	600	10/32	108	10/56	625	487	556
15	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-02	5E-05	7523	10/30	1972	10/38	10000	6689	8345
16	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-02	5E-01	6250	10/32	1262	10/50	6250	6094	6172
17	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-01	5E-03	410	10/31	114	10/36	625	325	475
18	20	5	50	0.5	0.5	1.5	5E-02	5E-04	4250	10/31	1021	10/42	6250	3250	4750
19	3	0.3	10	10	3	10	10	10	0.5476	10/30	0.1586	10/35	0.5445	0.5445	0.5445
20	3	0.3	10	10	1	3	10	1	0.8018	10/32	0.2323	10/35	1.125	0.6487	0.8869
21	15	2	40	40	5	15	100	30	1.0672	10/30	0.3091	10/35	1.445	0.7827	1.1139
22	10	0.5	50	50	0.3	1.5	1E-02	1E-02	5500	10/32	1083	10/51	5513	5013	5263
23	1	0.5	5	5	0.3	1	1E-02	5E-03	60.24	10/32	14.42	10/42	112.5	59.65	86.08
24	10	0.25	100	100	0.3	3	1E-04	2E-03	531302	10/33	105115	10/51	525313	513978	519646
25	5	0.5	15	15	0.1	0.5	3E-03	1E-03	4978	10/34	985	10/51	5042	4447	4745
26	10	0.5	30	30	0.3	2	1E-02	1E-02	5476	10/33	1083	10/51	5513	5013	5263

Iloraz  $10/33$  jest większy od  $10/47$ , co oznacza, że maksymalne stężenie w punkcie ( $y = 0, z = 0$ ) w przypadku ośrodka ograniczonego (brzegi rzeki) pojawi się wcześniej niż w przypadku ośrodka nieograniczonego. Obecność brzegu przyczynia się więc do przyspieszenia efektów związanych z rozprzestrzenianiem masy badanej substancji.

Maksymalne stężenie w punkcie ( $y = 0, z = 0$ ) w chwili  $t^{\max}$  jest następujące (r.: (5.1), (5.12)):

$$c^{\max} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t^{\max}})^2 \sqrt{D_y D_z}} \frac{M_s}{(2H)} \exp(-1) \quad (5.15)$$

Stężenie  $c^*$ , któremu odpowiada maksymalna zmiana stężenia w punkcie ( $y = 0, z = 0$ ), w chwili  $t^*$  opisuje formuła (r.: (5.1), (5.13), (5.14)):

$$c^* = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t^{\max} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right)^2 \sqrt{D_y D_z}} \frac{M_s}{(2H)} \exp\left(-\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right) \quad (5.16)$$

W tej sytuacji iloraz stężeń, charakteryzujących moment wystąpienia maksymalnej zmiany stężenia w punkcie ( $y = 0, z = 0$ ), dany jest wzorem:

$$\frac{c^*}{c^{\max}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \exp\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right) \approx \frac{10}{33} \quad (5.17)$$

Ułamek  $10/33$  wyznaczony dla ośrodka nieograniczonego jest zbliżony do ułamka  $10/32$  wyznaczonego dla ośrodka ograniczonego (brzegi rzeki). Oznacza to, że przebieg zmian stężeń w czasie w punkcie ( $y = 0, z = 0$ ) w obu ośrodkach ma ten sam charakter, a krzywe przedstawiające zmiany stężeń są podobne.

## Podsumowanie i wnioski

Przedstawione rozwiązanie (2.11), dla prostokątnego rozkładu stężeń w przekroju początkowym, w postaci formuły (2.44) umożliwia wyznaczenie rozkładu stężeń zanieczyszczeń w przekrojach poprzecznych rzeki.

Korzystając z twierdzenia o najlepszej aproksymacji kwadratowej, określono postać rozwiązań (2.11) w przypadku wypływu zanieczyszczeń z nieskończonego małego otworu lub z nieskończonej wąskiej pionowej lub poziomej szczeliny. Rozwiązania takie są przydatne, gdy nie jest rozpoznany rozkład stężeń zanie-

czyszczeń w przekroju początkowym, znany jest natomiast strumień zanieczyszczeń wprowadzanych do rzeki.

Maksima stężeń, w coraz dalszych przekrojach, przemieszczają się zawsze w kierunku bliższych krawędzi przekroju poprzecznego rzeki. Taka sytuacja może zaistnieć tylko wtedy, gdy zanieczyszczenia nie są wprowadzane w środku symetrii przekroju. W związku z tym próbki do pomiarów maksymalnych stężeń zanieczyszczeń w przekrojach rzeki powinny być pobierane w pobliżu miejsc wystąpienia maksymalnych stężeń określonych za pomocą równania (2.44). Pobór próbek w niewłaściwym miejscu może prowadzić do błędnego wniosku o wielkości stężenia zanieczyszczenia, a tym samym do błędnych decyzji dotyczących zarządzania jakością wód powierzchniowych.

Analiza szybkości przemieszczania się maksimum stężeń w kierunku naroża przekroju umożliwiła sformułowanie przybliżonych zależności umożliwiających obliczenie czasu przemieszczenia maksymalnego stężenia przekroju do naroża przekroju (r.(5.7)) oraz czasu wystąpienia stężenia maksymalnego, jakie w ogóle pojawi się w narożu (r.(5.10)).

Badanie przebiegu rozkładu stężeń w narożu przekroju, do którego przemieszczają się maksima stężeń, umożliwiło sformułowanie następujących wniosków ogólnych:

1. Maksymalne zmiany stężeń pojawiają się w przybliżeniu w około  $10/47$  czasu wystąpienia maksymalnego stężenia w narożu przekroju.
2. Maksymalne zmiany stężeń pojawiają się w chwili wystąpienia stężenia stanowiącego  $10/32$  stężenia maksymalnego, jakie pojawi się w narożu przekroju.
3. W przypadku ośrodka nieograniczonego maksymalne zmiany stężeń pojawiają się wcześniej, to jest w  $10/34$  czasu wystąpienia maksymalnego stężenia w odległości  $\xi_0 = a + \xi$ ,  $\zeta_0 = b + \zeta$  od osi źródła zanieczyszczenia.
4. W przypadku ośrodka nieograniczonego maksymalne zmiany stężeń pojawiają się w chwili wystąpienia stężenia stanowiącego  $10/33$  stężenia maksymalnego, jakie pojawi się w odległości  $\xi_0 = a + \xi$ ,  $\zeta_0 = b + \zeta$  od osi źródła zanieczyszczenia. Ułamek  $10/33$  wyznaczony dla ośrodka nieograniczonego jest zbliżony do ułamka  $10/32$  wyznaczonego dla ośrodka ograniczonego (brzezi rzeki). Oznacza to, że przebieg zmian stężeń w czasie w punkcie ( $y = 0$ ,  $z = 0$ ) w obu ośrodkach ma ten sam charakter, a krzywe przedstawiające zmiany stężeń są podobne.

Dysponując rozkładem stężeń w przekrojach poprzecznych rzeki, można określić zależność współczynnika zmienności od czasu. Umożliwia to wyznaczenie czasu niezbędnego do wymieszania zanieczyszczeń z wodami rzeki na odpowiednim poziomie.

Wyniki obliczeń uzyskane za pomocą wzoru (2.44) można wykorzystać do testowania jakości wyników otrzymanych za pomocą algorytmów numerycznych i jakości samych algorytmów. Z uwagi na liniową postać równania transportu masy (1.1) rozkład stężeń zanieczyszczeń pochodzących z kilku źródeł można uzyskać, sumując rozkłady stężeń dla poszczególnych źródeł.



## Literatura

- [1] Bielski A., Gońka A., Wyznaczanie drogi mieszania zanieczyszczeń w ciekach wodnych, *Archiwum Ochrony Środowiska* 2001, 27, 1, 19-43.
- [2] Boeker E., Rienk van Grondelle, *Fizyka środowiska*, WN PWN, Warszawa 2002.
- [3] Rup K., *Procesy przenoszenia zanieczyszczeń w środowisku naturalnym*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2006.
- [4] Bielski A., Adwekcja z dwukierunkową dyspersją zanieczyszczeń w stanach nieustalonych w środowisku wodnym, *Czasopismo Techniczne Z. 7*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2003.
- [5] Bielski A., Modelling of mass transport in watercourses considering mass transfer between phases in unsteady states. Part I. Mass transfer process for periodic and aperiodic changes of concentration, *Environment Protection Engineering*, 2011, (2), 35-51.
- [6] Bielski A., Modelling of mass transport in watercourses considering mass transfer between phases in unsteady states. Part II. Mass transport during absorption and adsorption processes, *Environment Protection Engineering* 2011, (4), 71-89.
- [7] Czernuszenko W., *Rozprzestrzenianie się zanieczyszczeń w rzekach i kanałach*, Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej, Warszawa 1983.
- [8] Czernuszenko W., *Naturalne mieszanie w rzekach*, *Archiwum Hydrotechniki*, z. 1-2, PWN, Warszawa 1986.
- [9] Kembłowski Z., Michałowski S., Strumiłło G., Zarzycki R., *Podstawy teoretyczne inżynierii chemicznej i procesowej*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1985.
- [10] Pohorecki R., Wroński S., *Kinetyka i termodynamika procesów inżynierii chemicznej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1977.
- [11] *Razrabotka metodow prognozirowanija kaczestwa wody wodnych obiektoow pri sbrose w nich stocznych wod*, *Izdateskij Otdiel Uprawlenija Diełami Siekrietariata SEW (Sowiet Ekonomiczeskoj Wzaimopomoszczi)*, Moskwa 1979.
- [12] Sawicki J.M., *Migracja zanieczyszczeń*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2003.
- [13] Bowie G.L., Mills W.B., Porcella D.B., Campbell C.L., Pagenkopf J.R., Rupp G.L., Johnson K.M., Chan P.W.H., Gherini S.A., *Rates, constants and kinetics formulations in surface water quality modeling*, Environmental Protection Agency, June 1985.
- [14] Vedat Batu, *Applied Flow and Solute Transport Modeling in Aquifers*, Taylor & Francis Group, 2006.
- [15] Zoppou C., Knight J.H., Analytical solution of a spatially variable coefficient advection - diffusion equation in up to three dimensions, *Applied Mathematical Modelling* 1999, 23, 667-685.
- [16] Drago M., Cescon B., Iovenitti L., A three-dimensional numerical model for eutrophication and pollutant transport, *Ecological Modelling* 2001, 145, 17-34.
- [17] Martin J.L., McCutcheon S.C., *Hydrodynamics and Transport for Water Quality Modeling*, CRC Press, 1999.
- [18] Chapra S.C., *Surface Water Quality Modeling*, Waveland Press, 2008.
- [19] Wesseling P., *Principles of Computational Fluid Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 2001.
- [20] Ninghu Su, Generalisation of various hydrological and environmental transport models using the Fokker-Planck equation, *Environmental Modelling & Software* 19, 2004, 345-356.
- [21] Rowiński P.M., *Modelowanie transportu zanieczyszczeń w rzekach na przykładzie rzeki Narwi*, Instytut Geofizyki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 2005.  
[http://manhaz.cyf.gov.pl/manhaz/szkola/pdf/S4/modelowanie Narew\\_Rowinski/Rowinski\\_Politechnika.pdf](http://manhaz.cyf.gov.pl/manhaz/szkola/pdf/S4/modelowanie%20Narew_Rowinski/Rowinski_Politechnika.pdf)
- [22] Bouchez J., Lajeunesse E., Gaillardie J., France-Lanordc Ch., Dutra-Maia P., Maurice L., Gualtieri C., Discussion -Turbulent mixing in the Amazon River: The isotopic memory of con-

- fluences, *Earth and Planetary Science Letters*, (2010) 290, 37-43, *Earth and Planetary Science Letters*, 2011, 448-450.
- [23] Bouchez J., Lajeunesse E., Gaillardet J., France-Lanord Ch., Dutra-Maia P., Maurice L., Turbulent mixing in the Amazon River: The isotopic memory of confluences, *Earth and Planetary Science Letters*, 2011, 37-43.
- [24] Ramaswami A., Milford J.B., Small M.J., *Integrated Environmental Modeling – Pollutant Transport, Fate, and Risk in the Environment*, Wiley, New Jersey 2005.
- [25] Bielski A., Adwekcyjny transport zanieczyszczeń w rzece z uwzględnieniem dyfuzji dwukierunkowej w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przepływu, *Ochrona Środowiska*, 2012, 2, 19-24.
- [26] Szarawara J., Skrzypek J., *Podstawy inżynierii reaktorów chemicznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.
- [27] Leitner R., *Zarys matematyki wyższej cz.: I, II, III*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994.
- [28] Bronsztejn I.N., Siemiendajew K.A., *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1976.
- [29] Korn G.A., Korn T.M., *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów, część II*, PWN, Warszawa 1983.
- [30] Zakowski W., Kołodziej W., *Matematyka*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
- [31] Bielski A., Adwekcyjny transport zanieczyszczeń w rzece z uwzględnieniem dyfuzji dwukierunkowej w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przepływu, *Ochrona Środowiska*, *Environmental Pollution Control* 2012, 34, 2.

## Transport of Pollutants in a the River with Bi-directional Diffusion

The paper presents an analytical method for solving the differential equation describing the advection mass transport with bi-directional diffusion in the plane perpendicular to the flow in the unsteady state.

In this method, a function of concentration is represented through the products of three functions related to coordinates of time and two linears. This manner allows the presentation of the mass transport equation in the form of three differential equations relating to a single coordinate. The solution of mass transport equation refers to the case of uniform, rectangular concentration distribution of pollutants in the river section. The solution allows to specify the distribution of pollutants concentrations in the river section. It also gives solutions for the discharge of pollutants from the infinitely small hole and the infinitely narrow horizontal or vertical gap. It presents formulas to determine the approximate time displacement of peak concentration of section to a corner of a rectangular cross-section of the river and the time of the maximum concentration at all appears in the corner of the section. In the paper there were described the properties of obtained solutions. The relative moments of appearance of the maximum changes of concentration with time at a specific location in the river cross-section were described. In the case of rectangular riverbed maximum concentration changes occur approximately at about 10/47 of time of to maximum concentration in a corner section or at the time of the concentration being 10/32 of the maximum concentration that will appear in the corner. In the unlimited space maximum changes of concentration occur earlier at 10/34 time to maximum concentration in the same place thanas in the limited space (river). In the unlimited space maximum concentrations occur at the time when concentration is 10/33 of the maximum concentration which will be in the same place as in the limited space. Fraction 10/33 set for unlimited space is close to the fraction 10/32 obtained for limited space (river). This means that the changes of the concentrations at the same point in the two spaces are the same in nature, and the curves of changes in concentration are similar.

**Keywords:** pollutants, water, river, advection, two-way diffusion, unsteady state